



Żart filozoficzny

O wspólnym źródle logiki i arytmetyki

tekst, obraz: Kervion

© wszelkie prawa autorskie zastrzeżone

epub 2026, wydanie 1.2

wydawca: Kervion

Wstęp

W niniejszej rozprawie dowodzimy, że logika i arytmetyka mają wspólne źródło. Są nim dwie elementarne operacje umysłowe: tożsamości i transformacji. Logika, arytmetyka, etyka – każda działalność intelektualna jest rozwinięciem i pewnym wariantem tych prostych operacji. Przedstawianą koncepcję nazywamy Matematyką Operacji Elementarnych (MOE). Wiedza niezbędna do zrozumienia tej pracy nie wykracza poza szkołę średnią. Rozprawa jest wynikiem introspekcji, sądzymy jednak, że dotyczy elementarnych zasad funkcjonowania umysłów ludzkich w ogóle. Zrozumienie poniżej przedstawionej koncepcji wymaga godziny skupienia.

Zanim rozpoczniemy właściwą część pracy, krótka uwaga lingwistyczna. Używamy kilku pojęć, które mają określone w logice czy arytmetyce znaczenie. Używamy ich zwykle w znaczeniu nieco odmiennym od tradycyjnego. Powinniśmy być może wprowadzić nowe pojęcia. Nie uczyniliśmy tak w trosce o łatwość lektury. I tak na przykład pojęcie alternatywy ma u nas nieco inne, niż w logice arystotelesowskiej, znaczenie.

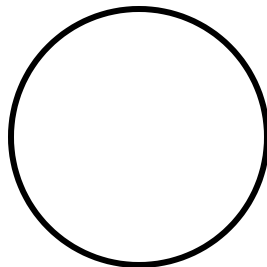
Mini rozprawa składa się z trzech krótkich rozdziałów:

1. Matematyka jednoelementowa
2. Matematyka dwuelementowa
3. Matematyka wielowymiarowa

Matematyka jednoelementowa

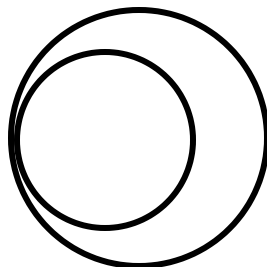
W MJ mamy tylko jeden element. Przedstawiamy go graficznie, zamiast słowami, za pomocą małego kółka. Oto nasz element.

Rys. 1



Ten jeden element (przedmiot, kółko) możemy poddać tylko jednej operacji. Nazwijmy tę operację *kółkowaniem* i przedstawiamy graficznie jako kółko w kółku.

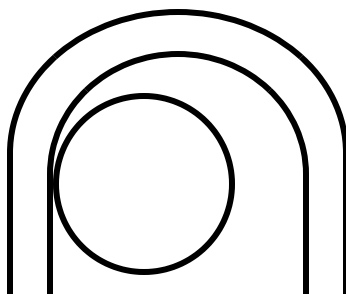
Rys. 2



Wynikiem tej operacji jest to samo kółko. Istotna jest następująca kwestia lingwistyczna: pierwotny element – kółko, i operacja – *kółkowanie*, to w istocie to samo. Przedmiot (wynik operacji) i sama operacja to jeden rzeczownik-czasownik, rozbity tylko na dwa odrębne byty ze względu na gramatyczny podział języka, jakim się posługujemy. Takie rozdzielenie na rzecz i operację nie jest ostrym rozróżnieniem we wszystkich językach. Nie jest tak ostre ani w chińskim, ani tym bardziej w języku Indian hopi. Z uwagi na późniejsze rozważania podkreślamy na wstępie, że przedmiot i operacja nie stanowią odrębnych bytów. Nie ma żadnego bytu i czasu, nie ma żadnego elementu pierwotnego, który dopiero później poddawany jest operacji, którą nazwaliśmy *kółkowaniem*. Nie prowadzimy rozważań ontologicznych, lecz skupiamy się na analizie funkcjonowania umysłu. Podstawową operacją, także w matematyce, jest proces wyodrębnienia jakiegoś elementu. Przedmiot to urojony byt – końcowy wynik elementarnego procesu umysłowego.

Zostańmy jeszcze chwilę przy matematyce jednoelementowej, choć na pozór wiele się w niej wydarzyć nie może. Oto kolejny rysunek.

Rys. 3

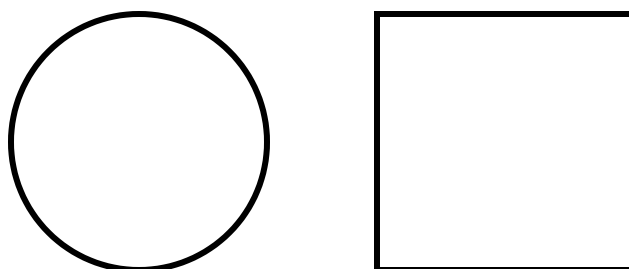




Nasze elementarne operacje umysłowe nie są dokonywane w języku. Przedstawianie ich graficzne, za pomocą chociażby kótek, jest nieco innym – czasem lepszym – sposobem, niż opis słowny. Z obu tych sposobów – opisu słownego i graficznego – będziemy korzystali równocześnie. Mamy zatem kilka kótek w kolejnych kótkach. Operacja *kótkowania* nie jest czymkolwiek ograniczona. Nie ma w niej także rozgraniczenia na kółka zewnętrzne i wewnętrzne, pierwsze i drugie. Metaforycznie rzecz ujmując: kółko wewnętrzne jest tak samo wewnątrz, jak i na zewnątrz kółka zewnętrznego. Rysunek pod tym względem jest więc mylący. Nie ma także żadnego rozróżnienia między kolejnymi kótkami. Jedyne co zachodzi, to niczym nieograniczone *kótkowanie*. Najgłębsza prawda umysłu to jednocześnie nieprawdopodobny wręcz banał. Mógłby on na przykład przyjąć formę nieskończonego zdania: *...to jest to jest to jest to jest to...* To wszystko na temat matematyki jednoelementowej. Za chwilę wprowadzimy drugi element.

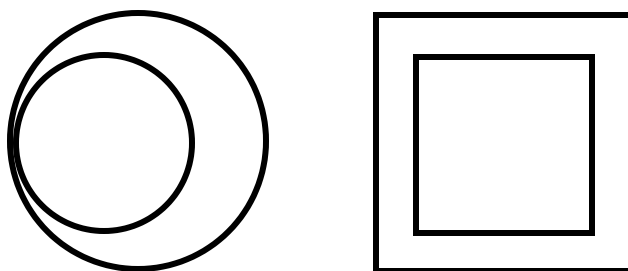
Matematyka dwuelementowa

Rys. 4



Mamy zatem dwa elementy: kółko i kwadrat (lub dowolne inne symbole graficzne). Oczywiście w odniesieniu do każdego z tych elementów możemy zastosować analogiczne operacje – kółkowania i kwadratowania:

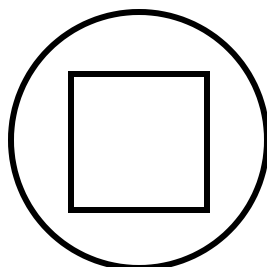
Rys. 5



Na razie jest to matematyka jednoelementowa, tyle że zastosowana do różnych elementów. Kolejny rysunek komplikuje

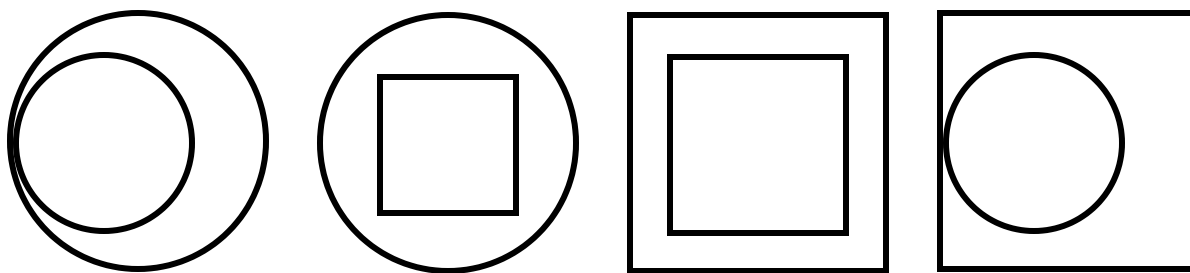
pierwotną prostotę i pozostanie jeszcze tylko jeden krok do zrębów i rozejścia się ścieżek logiki i arytmetyki.

Rys. 6



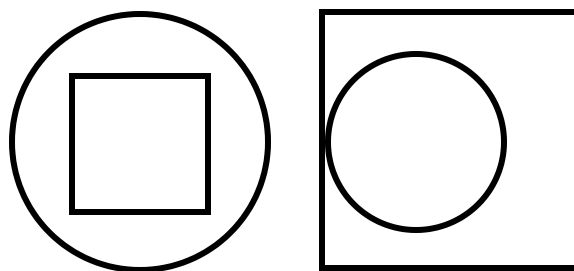
Oto druga podstawowa operacja, jakiej dokonuje umysł – operacja transformacji, przekształcania. Mamy dwie najbardziej elementarne operacje – nic prostszego nie jest do pomyślenia – nazwiemy je operacjami tożsamości w MOE i transformacji w MOE – w skrócie tożsamością (rys. 5) i transformacją (rys. 6). Te dwie operacje możemy przedstawić za pomocą czterech figur:

Rys. 7



Rodzi się następujące pytanie: czy te dwie figury przedstawiają to samo:

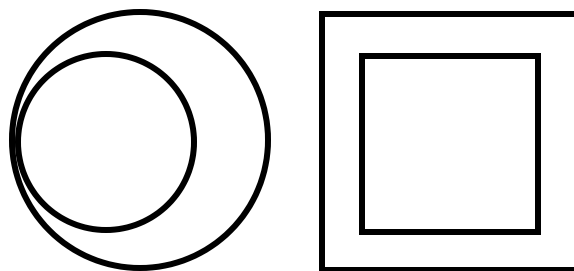
Rys. 8



Gdybyśmy pozostali na gruncie matematyki jednoelementowej, odpowiedź byłaby twierdząca. Teraz jednak nie mamy wyboru – na to samo, możemy spojrzeć z dwóch różnych stron. Kółko przechodzi w kwadrat lub kwadrat w kółko. Nie chodzi ani o poprzedzanie w sensie czasowym, ani o uporządkowanie na osi (liczbowej czy jakiegokolwiek innej), tym niemniej fakt pozostaje faktem – wprowadzając drugi element-operację kwadratowania, wprowadziliśmy też pewne rozróżnienie, którego najlepszą analogię w życiu codziennym stanowi rozróżnienie na stronę lewą i prawą. Wystarczy się obrócić, by strona lewa była prawą, tym niemniej dwie strony zawsze pozostaną. W dalszych rozważaniach przyjmujemy więc, że rysunki przedstawiają dwie różne (symetryczne) transformacje.

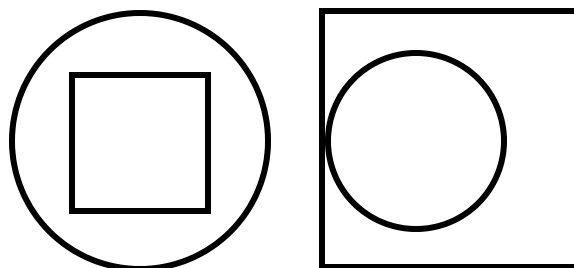
Mamy zatem cztery operacje (rys. 7). Możemy wyodrębnić w nich cztery pary, każdą pod innym względem podobną:

Tożsamości:



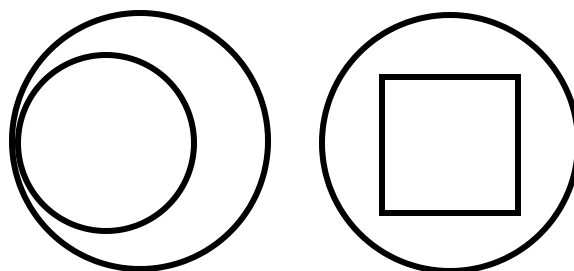
Transformacje:

Rys. 10



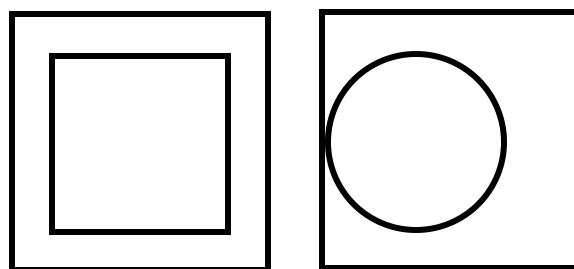
Kółkowania:

Rys. 11

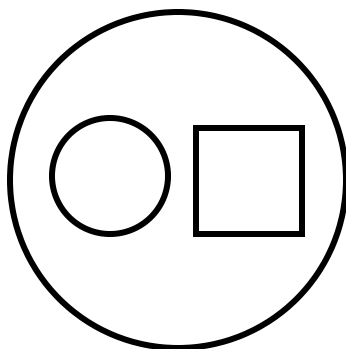


Kwadratowania:

Rys. 12

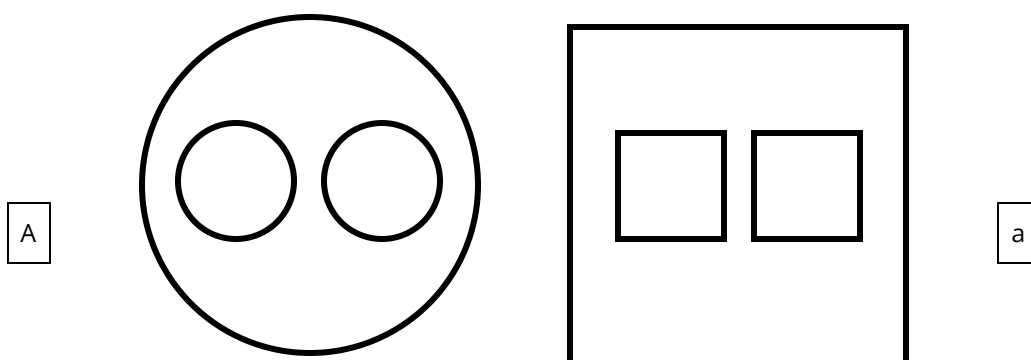


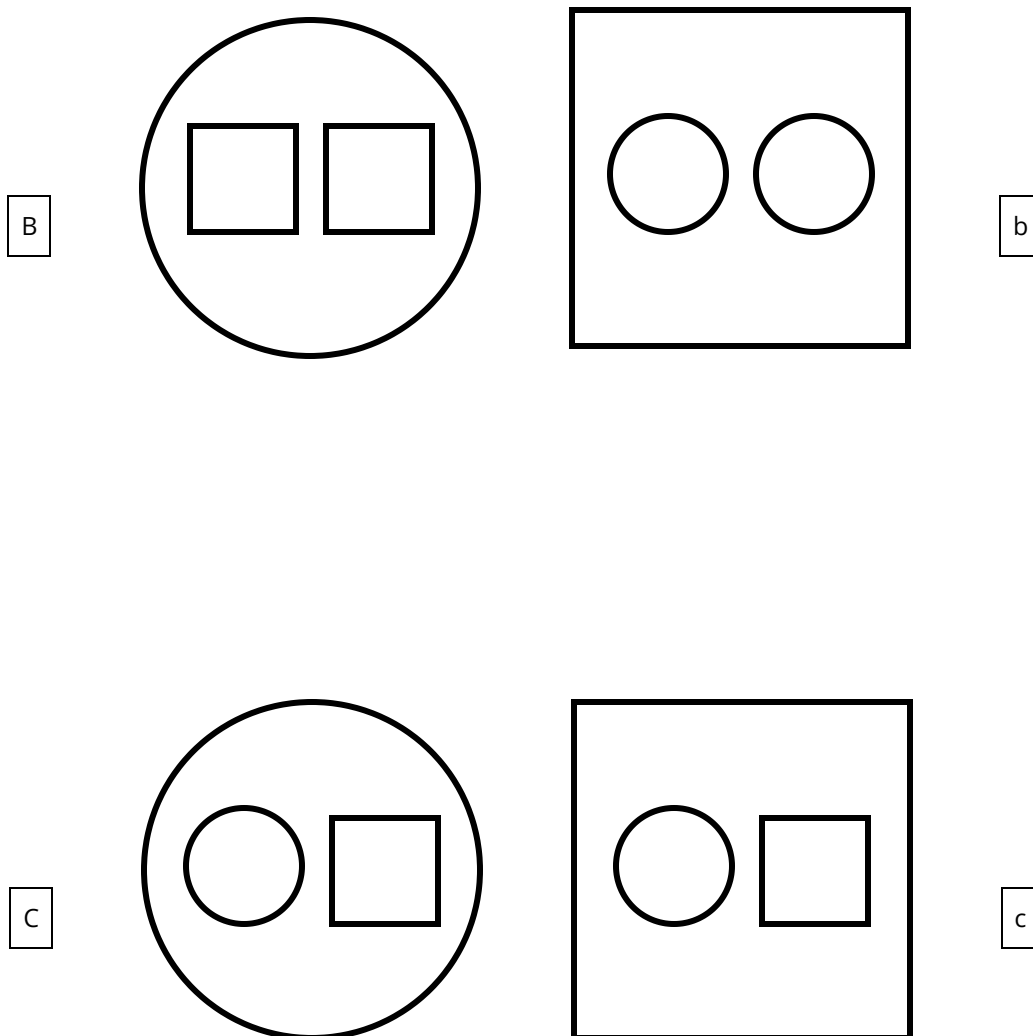
Powyższe cztery definicje wprowadziliśmy dla dalszej jasności wywodu. Zaznaczamy raz jeszcze, że analizujemy za pomocą pojęć abstrakcyjnych elementarne operacje umysłu, nie budujemy teorii aksjomatycznej. W pewnym sensie jest to więc praca psychologiczna, choć formułujemy ją za pomocą języka quasi matematycznego. Wprowadziliśmy na początku tego rozdziału drugi element. Otrzymaliśmy niemal od razu cztery możliwe operacje w miejsce jednej i cztery pary operacji pod różnymi względami podobnych. Nadal jednak nie wprowadzaliśmy żadnych ograniczeń – idziemy w rozważaniach milimetr po milimetrze, ale po najszerszym możliwym polu. Oczywiście w naszym umyśle istnieje nieskończenie wiele operacji-elementów. Matematyka dwuelementowa jest jedynie modelem, jednak modelem z powodzeniem wystarczającym do opisu operacji nieskończenie bardziej złożonych. Oto bowiem kolejny rysunek – następnej bardzo prostej czynności umysłowej:



Nie stawialiśmy żadnych warunków operacjom kółkowania i kwadratowania. Dokonując ich, możemy brać dowolną ilość kółek i kwadratów. Rozpatrzmy na początek przykład z dwoma elementami, bo w nim za chwilę odnajdziemy pierwociny logiki i arytmetyki. Mamy sześć możliwych sytuacji:

Rys. 14



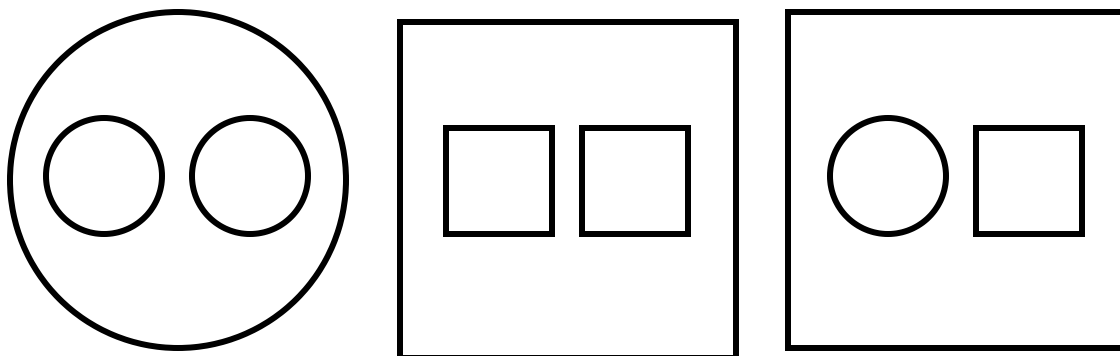


Wśród tej szóstki odnajdziemy łatwo operacje tożsamościowe, transformacyjne, a także dwie nowe (częściowo transformacyjne) operacje kółkowania i kwadratowania, oznaczone literami C i c.

Kółko i kwadrat to tylko symbole. Podobnie jak symbole zera i jedynki. Podstawmy więc w myślach, tytułem próby, zero w miejsce kółka i jeden w miejsce kwadratu. Jest to konwencja – możemy podstawić je odwrotnie, nic nie odróżnia bowiem, poza grafiką, kwadratu od kółka w naszych rozważaniach. Dokonamy dwóch eksperymentów myślowych. W pierwszym zinterpretujemy zero i jedynkę jako wartości logiczne w rachunku zdań Arystotelesa, w drugim jako liczby całkowite.

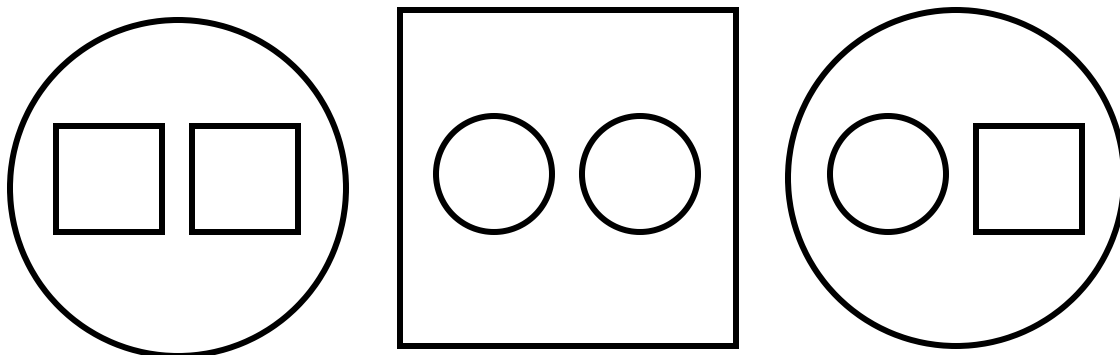
Dla przykładu przeanalizujemy alternatywę arystotelesowską. Alternatywę w MOE będziemy w skrócie nazywać alternatywą, dla odróżnienia od alternatywy arystotelesowskiej. Alternatywa to takie operacje umysłu, w których dopuszczalne są A, a i c, natomiast niedopuszczalne B, b, C.

Dopuszczalne:



Niedopuszczalne:

Rys. 16



Odpowiednikami arystotelesowskimi są zapisy:

$$0 \vee 0 \equiv 0$$

$$1 \vee 1 \equiv 1$$

$$0 \vee 1 \equiv 1$$

Natomiast nie są:

$$1 \vee 1 \equiv 0$$

$$0 \vee 0 \equiv 1$$

$$0 \vee 1 \equiv 0$$

Odpowiednikiem arytmetycznym opisanej powyżej alternatywy byłoby działanie, które moglibyśmy nazwać wyznaczaniem maksimum w zbiorze dwuelementowym liczb (0, 1). Mamy bowiem:

$$\max(0,0) = 0$$

$$\max(1,1) = 1$$

$$\max(0,1) = 1$$

Natomiast niedopuszczalne jest:

$$\max(1,1) = 0$$

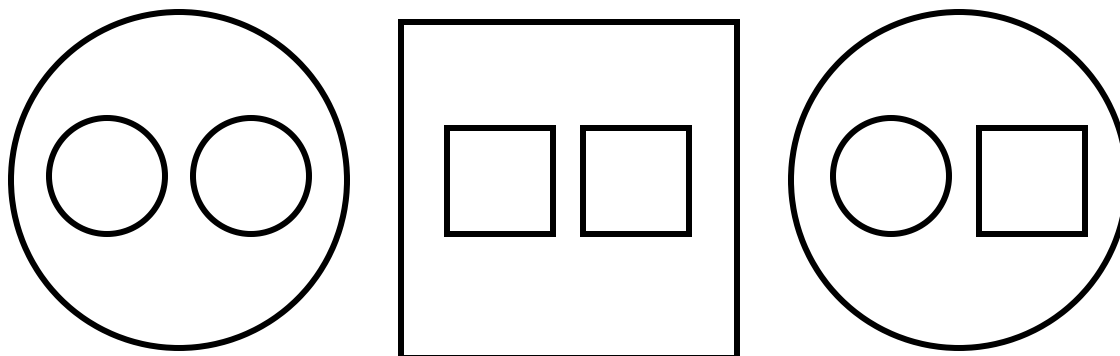
$$\max(0,0) = 1$$

$$\max(0,1) = 0$$

Przykładem drugim będzie koniunkcja (analogicznie – operacjonistyczna i arystotelesowska) i jej arytmetyczny odpowiednik w danym zbiorze – mnożenie.

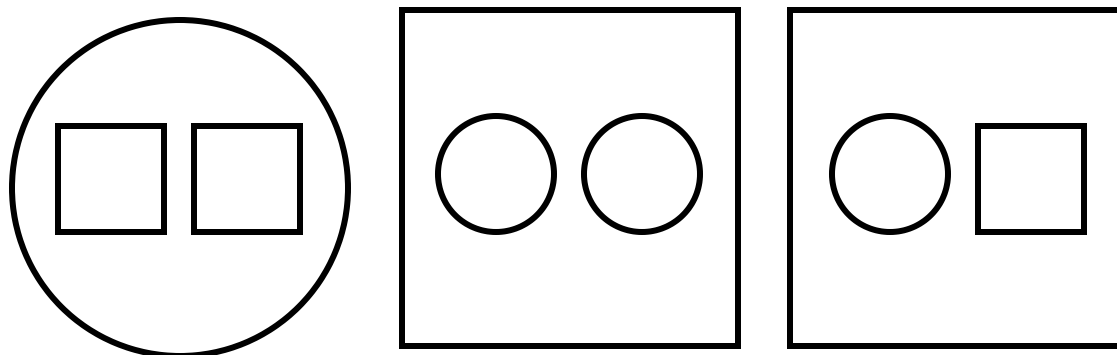
Dozwolone: A, a, C

Rys. 17



Niedozwolone: B, b, c

Rys. 18



Dopuszczalne jest bowiem:

$$0 \wedge 0 \equiv 0$$

$$1 \wedge 1 \equiv 1$$

$$0 \wedge 1 \equiv 0$$

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

Nie możemy natomiast:

$$1 \wedge 1 \equiv 0$$

$$0 \wedge 0 \equiv 1$$

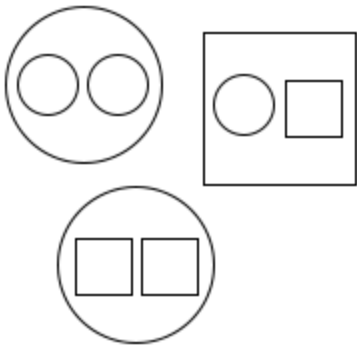
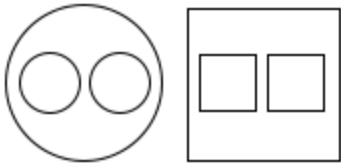
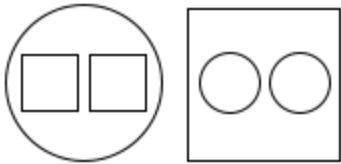
$$0 \wedge 1 \equiv 1$$

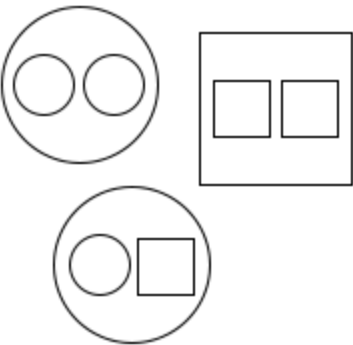
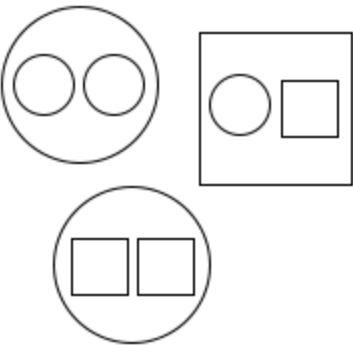
$$1 \cdot 1 = 0$$

$$0 \cdot 0 = 1$$

$$0 \cdot 1 = 1$$

Dalej, w podobny sposób, możemy zauważyć, że:

działanie	MOE	logika
Dysjunkcja		$\begin{array}{l l} 0 & 0 \equiv 0 \\ 1 & 1 \equiv 0 \\ 0 & 1 \equiv 1 \end{array}$
Tożsamość		$\begin{array}{l} (0 \wedge 0) \equiv 0 \\ (1 \wedge 1) \equiv 1 \end{array}$
Negacja		$\begin{array}{l} \sim (1 \wedge 1) \\ \sim (0 \wedge 0) \end{array}$

działanie	MOE	arytmetyka
Minimum		$\min(0,0) = 0$ $\min(1,1) = 1$ $\min(0,1) = 0$
Różnica (wartość bezwzględna odejmowania)		$0 - 0 = 0$ $1 - 1 = 0$ $1 - 0 = 1$ $(0 - 1 = 1)$

I tak dalej. Naturalnie dotychczas wprowadzone pojęcia matematyki dwuelementowej same w sobie nie wystarczą do stworzenia logiki i arytmetyki. Potrzebne byłyby pojęcia relacji, zbioru, uporządkowania, nieskończoności, funkcji, zdania itd. Okazałoby się także natychmiast, że gdybyśmy zamiast zera i jedynki podstawili w miejsce kółka i kwadratu liczby 2 i 3, nie moglibyśmy snuć analogii do mnożenia i dodawania. Wynika to z faktu, że operacje dodawania i mnożenia na liczbach całkowitych nie są działaniami jednorodnymi, lecz składają się z różnych operacji bardziej pierwotnych i myli nas raz jeszcze język.

Używamy tym razem nie dwóch słów na oznaczenie tego samego, ale jednego słowa na oznaczenie dwóch różnych rzeczy. Na przykład dodawanie w zbiorze liczb naturalnych i dodawanie w zbiorze liczb całkowitych są odmienne ze względu na nietypowe zachowanie zera. Tym niemniej, na bazie pojęć matematyki dwuelementowej można by tworzyć kolejne pojęcia, które do logiki i arytmetyki w końcu doprowadzą. Ich wyprowadzenie jest kwestią elegancji i pełności wywodu.

Możemy natomiast na przykładzie dotychczasowej zabawy zauważyć rzecz istotną: podstawowe operacje logiczne i arytmetyczne mają jedno źródło – sześć elementarnych operacji: dwie tożsamości i cztery transformacji. Działania matematyczne (arytmetyczne i logiczne) charakteryzują się ostrym podziałem na operacje dozwolone i niedozwolone w obrębie tej podstawowej szóstki.

Powstaje pytanie: czy, biorąc pod uwagę tych sześć operacji matematyki dwuelementowej za model, dokonujemy innych operacji umysłowych, które nie mają charakteru działań matematycznych w powyższym sensie?

Wyobraźmy sobie dwie przykładowe sytuacje.

Sytuacja pierwsza: ktoś posługuje się jedynie operacją kwadratowania (rys. 12 i rys. 14 a, b, c). Wszystko sprowadza do kwadratu, czymkolwiek byłby ten kwadrat, bez względu na to, czy kwadratowanie odbywa się na dwóch kwadratach, czy dwóch

kółkach, czy kółku i trójkącie. Zaryzykujemy przypuszczenie, że każda ideologia, religia i teoria humanistyczna, nawet najwyższej próby filozofia, przynajmniej w pewnych swoich zakresach postępuje w ten właśnie sposób – upraszcza, łamiąc tym samym reguły działań matematycznych.

Sytuacja druga: używa się jednocześnie obu operacji (A, b) lub (B, a) lub (C, c). Można by powiedzieć, że mamy w tym przypadku do czynienia z ocenami moralnymi (estetycznymi). To jeden z najbardziej typowych problemów, elementarnych i niematematycznych zarazem – te same dane wejściowe i różna ocena moralna. Jeśli nasza analogia jest słuszna, to dylematy moralne będą istniały tak długo, jak długo będziemy istnieć my sami – dowolność korzystania z istniejących możliwych operacji jest cechą konstytutywną naszego umysłu. Póki możemy wybierać pomiędzy jedną z operacji (A, b), lub pomiędzy jedną z (B, a), lub z (C, c) – jesteśmy wolnymi, a więc miłosiernymi i okrutnymi jednocześnie ludźmi. Z tej perspektywy logika czy arytmetyka to heroiczne i skazane na niepowodzenie próby ujarzmienia naszego umysłu, by działał w sposób jednoznaczny. Albo matematyka, albo wolność – nie są to obszary do pogodzenia w ramach spójnej intelektualnie teorii.

Wróćmy na chwilę do miejsca, w którym wspomnieliśmy o stronach lewej i prawej. Ujmując rzecz metaforycznie, chcielibyśmy – jako matematycy – raz na zawsze określić, która strona jest lewa, a która prawa, ale natrafiamy na opór ze strony

samego umysłu, dla którego strony rzeczywistości są jak wycieczka po wstędze Möbiusa obustronnie obłożonej lustrami. Zaryzykujemy przypuszczenie, że jeśli pary operacji (A, b) lub (B, a) lub (C, c) używa jednocześnie jedna osoba, to jest nią albo fizyk testujący jakiś aspekt mechaniki kwantowej, albo ktoś, kto już od dawna spędza wakacje w wariatkowie – z punktu widzenia elementarnych operacji umysłu nie ma istotnej różnicy między tymi dwoma przypadkami.

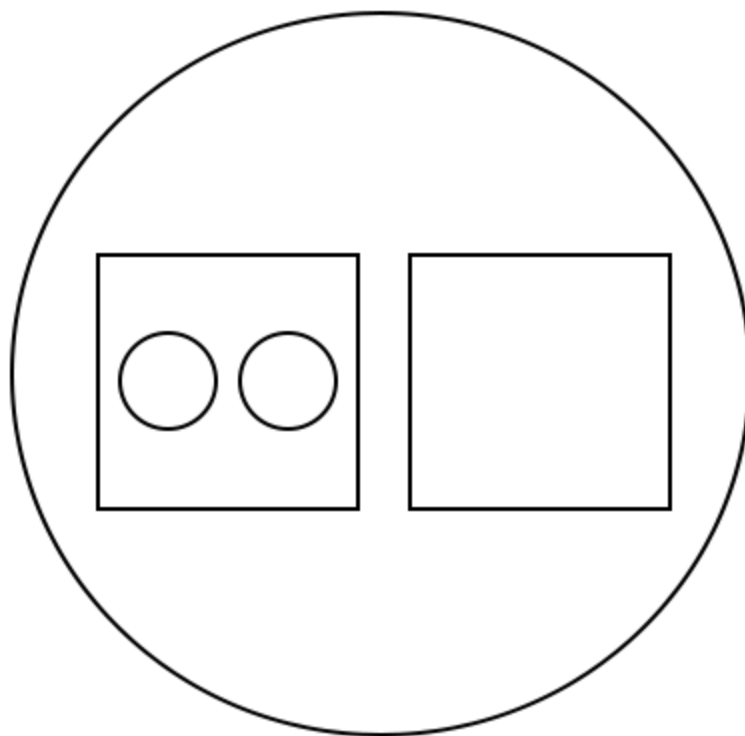
Powróćmy do zagadnienia początkowego – pierwotnego elementu. Jak mówiliśmy, nie było potrzeby wprowadzania uporządkowania, następności, czy czegoś podobnego. Konieczność taka pojawia się wraz z wprowadzeniem drugiego elementu. Po pierwsze, aby wiedzieć, czy transformacja jest prawa, czy lewa, czy kwadrat przechodzi w kółko, czy kółko w kwadrat. Jeśli jednak wprowadziliśmy możliwość zgrupowania dwóch elementów i przekształcenia ich w jeden, to – przez analogię – możemy wyobrazić sobie transformację od jednego do dwóch elementów. Z tego typu przekształceniami mamy do czynienia na przykład w dzieleniu arytmetycznym, w fizyce rozbijającej protony na kwarki, czy teologii dzielącej boga na ojca, syna i ducha świętego. Najpierw tworzymy pewien byt – proton, potem dokonujemy na nim operacji transformacji i otrzymujemy kilka innych bytów. Oczywiście, w przypadku fizyki empiria jest decydująca – nie wszystkie możliwe operacje intelektualne znajdują odzwierciedlenie w rzeczywistości. Teologia jest natomiast fantazjowaniem w postaci czystej.

Wyszliśmy od dwóch elementów – kwadratu i kółka, aby szybko, niemal za darmo, mieć szesnaście podstawowych operacji. Składają się na nie: cztery operacje jednoelementowe (jeden element – jedna operacja), sześć operacji z rysunku 14 prowadzących od dwóch elementów do jednego i sześć operacji odwrotnych, symetrycznych do wyżej omówionych, rozbijających jeden element na dwa elementy. Ich przedstawienia rysunkowe byłyby identyczne. W dalszych rozważaniach nie będziemy się odwoływać do analizy tej drugiej szóstki.

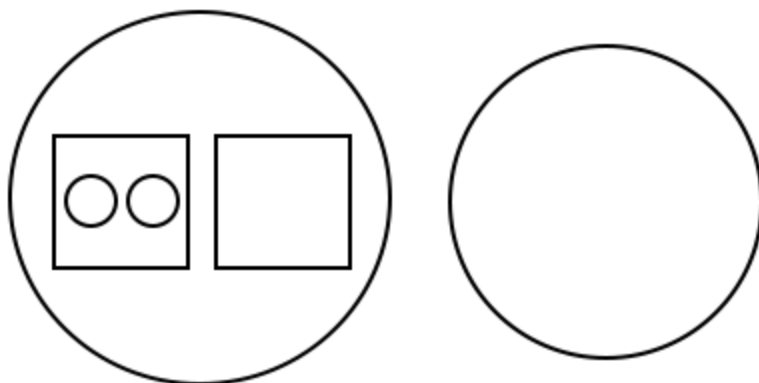
Twierdzimy, że ludzki umysł tworzy nieskończoną ilość elementów, nieskończoną ilość operacji tożsamościowych. Nieskończona ilość elementów przekształcana na nieskończoną ilość sposobów. Liczba nie ma tu jednak znaczenia. Model dwuelementowy jest wystarczający do opisania bardziej złożonych operacji umysłu. Na tym kończymy opis podstaw działania umysłu. Jest on krótki i prosty, ponieważ naszym celem było dotarcie do rzeczy podstawowych. Twierdzimy, że nie są nimi bóg, technienie, ani materia, ale dwie operacje umysłu – operacje tożsamości i transformacji. Nic nie poradzimy, jeśli ktoś spodziewał się ognia bengalskich i czuje się rozczarowany.

W dalszej części pracy przedstawiamy pewne sposoby wykorzystania zgromadzonego dotychczas materiału. Będziemy się posługiwać w większym stopniu rysunkami. Proponujemy następującą zabawę:

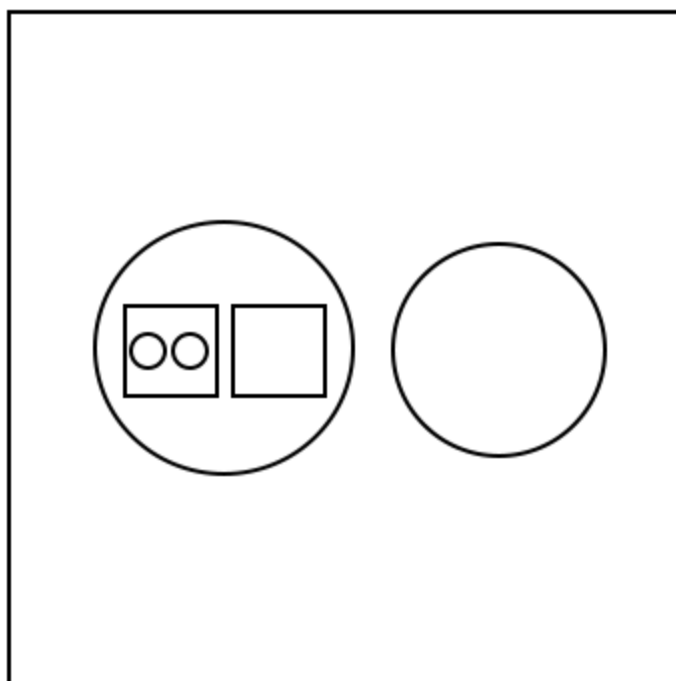
Pierwszy rysunek to możliwe do wykonania operacje:



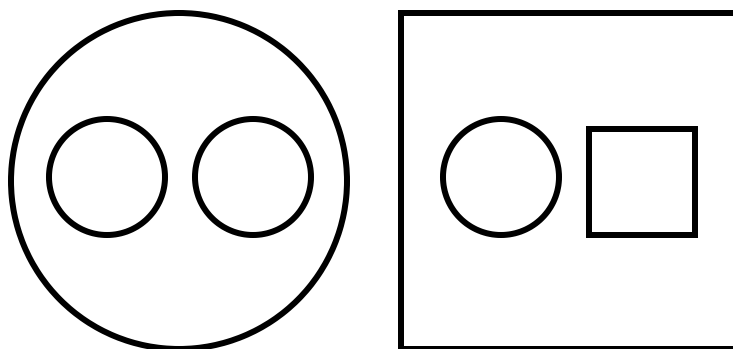
Następnie obok tego rysunku umieszczamy kółko lub kwadrat:



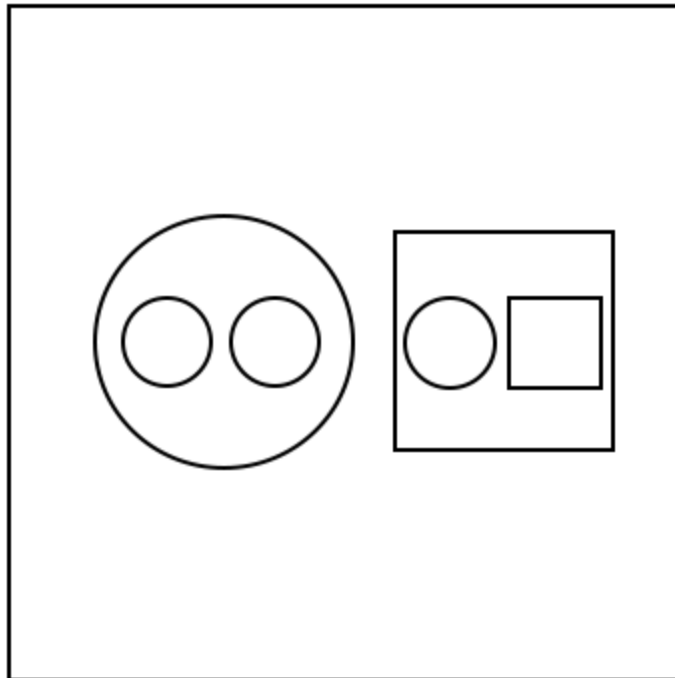
Jeżeli pierwszy rysunek i element dodany są zawarte w podanej na pierwszym rysunku definicji, można wówczas zakreślić większe kółko lub kwadrat, na przykład w ten sposób:



Jeśli zawarte nie są – zakreślić nic nie można. Potraktujmy to jako zabawę w założenia, pytanie i odpowiedź. Jeszcze jeden przykład zadania i odpowiedzi:



Poprawną odpowiedzią jest oczywiście kwadrat.

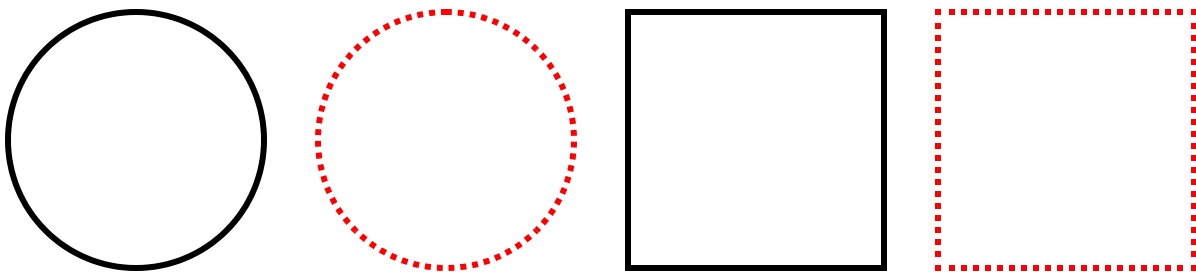


Tego typu zabawę można wykorzystać jako:

1. podstawę gier logicznych
2. zabawę edukacyjną dla dzieci
3. testowy sposób badania inteligencji

Matematyka wielowymiarowa

Matematyka dwuelementowa dosyć szybko staje się nudna przez prostotę. Jednak ilość elementów, transformacji i atrybutów elementów można mnożyć w nieskończoność. Wszystkie pozostałe matematyki nazywamy matematykami wielowymiarowymi. Ich ogólny opis przekracza zamierzenia tej mini rozprawy. Podajemy tu jedynie przykład takiej matematyki – dwuelementowej, w której każdy element ma dwa atrybuty – graficznie oznaczymy je różnym kolorem.



W przypadku matematyki jednoelementowej mieliśmy jeden element-operację. W przypadku dwuelementowej – dwa elementy i od razu aż szesnaście operacji. W przypadku dwóch elementów o dwóch atrybutach każdy ilość możliwych operacji sięgnie tysięcy – nie ma sensu podawać tutaj wszystkich

rysunków z opisami. Przyjmujemy, że zasady stawiania pytań są jasne. Proponujemy pozornie łatwą łamigłówkę na zakończenie tej pracy.

Jeśli komuś udało się łamigłówkę rozwiązać – gratulujemy! Nowa umiejętność nie jest co prawda do niczego w życiu przydatna, ale pozwala być dumnym z uprawiania *seni kanggo seni*.

